



المحاضرة النظرية العاشرة

((لقد برهنا أنه لأي مصفوفة متناهية نسب كثير الحدود المميز))

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

و المطلوب أوجد المصفوفة المتناهية مع A ؟

الحل : حيث تكون المصفوفة متناهية د A يجب أن تحقق العلاقة

$$B = P^{-1} A P$$

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in$$

$$\Rightarrow B = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

إذاً هما متناهيات

للتأكد نوجد كثير الحدود المميز للمصفوفتين A و B يجب أن يكون كثير الحدود

المميز للمصفوفة A يساوي كثير الحدود المميز للمصفوفة B

صحيح التعريف لنوجد $\chi(A)$ و $\chi(B)$

$$\chi(A) = |\chi E - A|$$

$$= \left| \chi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \chi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \chi-1 & -2 \\ -3 & \chi-4 \end{vmatrix}$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النق الرئيسي) لجامعة البعث 031-2121206

f Tishreen.lib

تعليم (مفتوح - نظامي) / اشترك الطلاب / مراسلات لكافة المحافظات



$$= (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 4x - x + 4 - 6$$

$$= x^2 - 5x - 2$$

$$cl(x)_B = |x E - B| = \begin{vmatrix} x+5 & -12 \\ 4 & x-10 \end{vmatrix}$$

$$= (x+5)(x-10) + 48 = x^2 - 10x + 5x - 50 + 48$$

$$= x^2 - 5x - 2$$

نلاحظ ان $cl(x)_A = cl(x)_B$

اذ المصفوفتان متساويتان

ملاحظة: هناك عدد لا نهائي من المصفوفات المتساوية مع A و B ليس كيز الحدود المميز

ملاحظة *

برهنا ان لأي مصفوفتين متساويتين نفس كيز الحدود المميز لأن العكس غير صحيح. أنه لو كان للمصفوفتين هرتيتين من نفس المرتبة نفس كيز الحدود المميز فليس بالضرورة ان تأخذ هاتان المصفوفتان متساويتان

مثال: لياث لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ للوحدة}$$

نجد حسب التعريف

$$cl(x)_A = |x E - A|$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-1)(x-1) = (x-1)^3$$

جدار عناصر القطر الرئيسي



$$\chi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-1)(x-1) = (x-1)^3$$

$$\chi(x) = (x-1)^3 \quad \text{و} \quad \chi(x) = (x-1)^3$$

أي أنه لا يتغير المصفوفة بعد تغيير الحدود المميزة إلا أن هاتين المصفوفتين غير متشابهتين لأنه من أجل أي مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، والقابلة للقلب يكون

$$P^{-1}BP = P^{-1}EP = P^{-1}P = E \neq A$$

ما يعني أنه لا يمكن إيجاد مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة وقابلة

$$A = P^{-1}BP \quad \text{للعلاقة}$$

«المصفوفة الواضحة لا يمكن أن تكون متشابهة، إلا مع نفسها»

سنستعمل الآن إحدى مبرهنتي هاتين

المرهنة الأولى: ((سؤال دورة))

تكون A مصفوفة مربعة وأن $\chi(x)$ و $m(x)$ هما كثيرتي

الحدود المميزة، والأصغر لهذه المصفوفة فإن

$$m(x) \mid \chi(x) \quad \text{أي} \quad \chi(x) = m(x) \cdot q(x)$$



البرهان غير مطلوب للفرز فقط

$$m(x) \nmid \chi(x) \quad \text{أي} \quad m(x) \text{ لا يقسم } \chi(x) \quad \Rightarrow \chi(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{و} \quad \deg r(x) < \deg m(x)$$

الباقي

$$\Rightarrow r(x) = \chi(x) - m(x) \cdot q(x) \quad \rightarrow \text{علاقة غير صحيحة}$$

$$\Rightarrow r(A) = \chi(A) - m(A) \cdot q(A)$$



$$= 0 - 0 = 0 \quad \text{المصفوفة المربعة} \quad \text{المصفوفة المربعة}$$

المرحلة الثانية (دون برهان) : ()

نعرفنا A مصفوفة مربعة $n \times n$ و $m(x)$ كثير الحدود المميز
والأخير $p(x)$ لهذه المصفوفة A $p(x) = \det(xI - A)$

نتيجة هامة : كثير الحدود المميز والأخير للمصفوفة مربعة نفس العوامل
الخطية الباقية $p(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$
مثال : أوجد كثير الحدود المميز والأخير للمصفوفة المربعة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

من التعريف

$$p(x) = \det(xI - A) = (x-1)^3 (x-2)$$

لبناء $p(x)$ النتيجة ثلاث عبارات

$$p_1(x) = (x-1)(x-2)$$

$$p_2(x) = (x-1)^2(x-2)$$

$$p_3(x) = (x-1)^3(x-2)$$

نلاحظ أن $p_3(A) = (A-E)(A-2E)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\neq 0$

تلك الحالة

المصفوفة المعكوفة

$$\Rightarrow f_1(x) \neq 0 \text{ و } f_1(x) \neq m(x)$$

وبنفس الطريقة السابقة

$$\Rightarrow f_1(A) = (A - E)^2 (A - 2E)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\neq 0$

المصفوفة المعكوفة

$$\Rightarrow f_2(x) \neq m(x)$$

$$f_3(A) = (A - E)^3 (A - 2E) = 0$$

ولذلك

المصفوفة المعكوفة

$$\Rightarrow m(x) = f_3(x) = 0$$

« انتهت المحاضرة »

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

! عدد فائمه الشميني